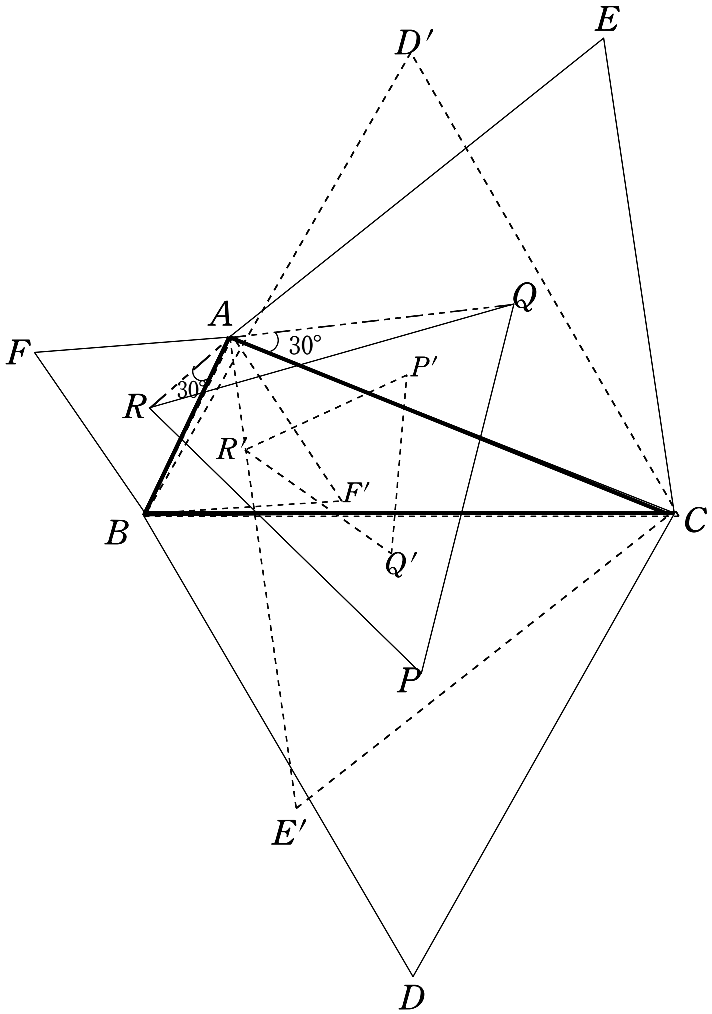
ナポレオンの三角形

山脇の超数学講座 No. 50

50回目の今回は「ナポレオンの三角形」を紹介しよう。
ナポレオン・ボナパルト（1769～1820）は，1789年にフランス革命が起こったとき，その後の混乱を収め，フランスの皇帝にまで登り詰めた人であるが，数学とりわけ幾何学に大変興味をもっていた人であった。ナポレオンの名を冠した三角形とは次のようなものである。命名者はわかっていない。
「任意の三角形 ABC が与えられたとき，それぞれの辺を1辺にもつ正三角形をその3辺の外側に描く。次にその3つの三角形の重心の位置 P，Q，R を求め，それらを線分で結ぶと正三角形が得られる (*)。さらに3つの正三角形を元の三角形の内側に描き，それらの重心 P'，Q'，R' を結んでも正三角形が得られる (**)」　このように2つの正三角形が得られ，(*) を「ナポレオンの外三角形」，(**) を「ナポレオンの内三角形」と呼んでいる。（図1）
そして，驚くべきことに「ナポレオンの外と内の2つの正三角形の面積の差は，元の三角形の面積に等しい」という定理がある。「ナポレオンの定理」という。

図 1



証明　《三角関数を用いている》
$\angle BAC=A$，$\angle ABC=B$，$\angle BCA=C$，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とすると，
まず，「ナポレオンの外三角形」について，余弦定理より，

$$QR^2=AQ^2+AR^2-2AQ\cdot AR\cos(A+60^\circ)$$
$$=\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2-2\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)$$
$$=\frac{1}{3}(b^2+c^2-bc\cos A)+\frac{\sqrt{3}}{3}bc\sin A$$

ここで，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ （S は $\triangle ABC$ の面積）を代入すると，

$$QR^2=\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)+\frac{2\sqrt{3}}{3}S$$ となる。

同様に，

$$RP^2=\left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2-2\left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)\cos(B+60^\circ)$$
$$=\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)+\frac{2\sqrt{3}}{3}S,$$

$PQ^2=\dfrac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}S$ となり，　$PQ>0$，$QR>0$，$RP>0$ より，
$PQ=QR=RP$ となって，$\triangle PQR$ は正三角形である。　【(*) の証明 終】
次に，$\triangle PQR=\dfrac{1}{2}PQ^2\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left\{\dfrac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}S\right\}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{24}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{2}S \quad \cdots\cdots ①$$

一方，「ナポレオンの内三角形」についても，余弦定理で，

$$Q'R'^2=\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2-2\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)\cos(A-60^\circ)$$ が成り立ち，

$Q'R'^2=\dfrac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}S$，やはり対称性により，$P'Q'=Q'R'=R'P'$
となって，「ナポレオンの内三角形」も正三角形である。【(**) の証明 終】
さらに，$\triangle P'Q'R'=\dfrac{\sqrt{3}}{24}(a^2+b^2+c^2)-\dfrac{1}{2}S \quad \cdots\cdots ②$　となるので，
「ナポレオンの外三角形」と「内三角形」の面積の差は，①－②より，
$\triangle PQR-\triangle P'Q'R'=S$ となって，「ナポレオンの定理」も証明された。終